武汉市2021届高中毕业生四月质量检测

数学试卷参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	A	C	B	C	D	BCD	AC	ABD	ABC

填空题：

13. -14　　14. $\frac{4}{\pi}$　　15. $\frac{e^x-1}{e^x+1}$（其它正确答案同样给分）　　16.① 18　② $2^n+(-1)^n\cdot 2$

解答题：

17.（10分）

解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

若选①，由 $2S_5=S_3+S_9+12$ 得：

$2(5a_1+10d)=(3a_1+3d)+(9a_1+36d)+12$.

整理得：$2a_1+19d+12=0$，又 $a_1=13$　$\therefore d=-2$.

由 $S_m=S_k$ 得：$ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d$.

$\therefore 13m-m(m-1)=13k-k(k-1)$.

$\therefore (m-k)(14-m-k)=0$，又 $m<k$，$\therefore m+k=14$.

故存在正整数 m,k 满足 $m+k=14$.

若选②，由 $\frac{S_7}{a_4+a_6+a_7+a_9}=\frac{7}{3}$ 得：

$\frac{7a_1+21d}{2(a_4+a_9)}=\frac{7}{3}$，即 $\frac{a_1+3d}{2(2a_1+11d)}=\frac{1}{3}$.

$\therefore a_1+13d=0$，又 $a_1=13$，$\therefore d=-1$.

由 $S_m=S_k$ 得：$ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d$.

$\therefore 13m-\frac{m(m-1)}{2}=13k-\frac{k(k-1)}{2}$，又 $m<k$.

$\therefore m+k=27$，故存在正整数 m,k，满足 $m+k=27$.

若选③，由 $\frac{a_5^2-a_3^2}{a_4^2-a_2^2}=\frac{4}{7}$ 得：$\frac{(a_5+a_3)\cdot 2d}{(a_4+a_2)\cdot 2d}=\frac{4}{7}$.

$\therefore \frac{2a_1+6d}{2a_1+4d}=\frac{4}{7}$　$\therefore 3a_1+13d=0$，又 $a_1=13$，$\therefore d=-3$.

由 $S_m=S_k$ 得：$ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d$.

$\therefore 13m-\frac{3}{2}m(m-1)=13k-\frac{3}{2}k(k-1)$.

$\therefore 29(m-k)-3(m-k)(m+k)=0$，又 $m<k$.

$\therefore 29-3(m+k)=0$　$\therefore m+k=\frac{29}{3}$.

$\because m$、k 为正整数，故不存在.　……………………………（10分）

18.(12分)

(1)连接 BD,在 $Rt\triangle BAD$ 中,由 $AB=4$, $AD=3$, $\angle BAD=90°$.

得 $BD=5$, $\therefore \sin\angle ABD=\dfrac{3}{5}$, $\cos\angle ABD=\dfrac{4}{5}$.

$\therefore \sin\angle DBC=\sin(45°-\angle ABD)=\sin45°\cdot\cos\angle ABD-\cos45°\cdot\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle BCD$ 中,由 $\angle BCD=90°$ 知:

$CD=BD\cdot\sin\angle DBC=5\times\dfrac{\sqrt{2}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………(6分)

(2)连接 AC,由(1)知 $BD=5$,在 $Rt\triangle ABD$ 中易知 $\sin\angle ABD=\dfrac{3}{5}$, $\cos\angle ABD=\dfrac{4}{5}$.

在 $Rt\triangle BCD$ 中,由 $BC=2\sqrt{5}$, $BD=5$ 得 $CD=\sqrt{5}$ 易知 $\sin\angle CBD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\angle CBD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \cos\angle ABC=\cos(\angle ABD+\angle CBD)=\cos\angle ABD\cdot\cos\angle CBD-\sin\angle ABD\cdot\sin\angle CBD=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理得:

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=4^2+(2\sqrt{5})^2-2\times4\times2\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=20$.

$\therefore AC=2\sqrt{5}$. ……………………………(12分)

19.(12分)

(1)取 BD 中点 O,连 A_1O,OF,$\because F$ 为 CD 的中点,$\therefore OF\parallel BC$,又 $OF\not\subset$ 面 BCE, $BC\subset$ 面BCE.

$\therefore OF\parallel$ 平面 BCE, $A_1B=A_1D$,$\therefore A_1O\perp BD$,又$\because$平面 $A_1BD\perp$ 平面 CBD,平面 $A_1BD\cap$ 平面 $CBD=BD$.

$\therefore A_1O\perp$ 平面 CBD,又 $CE\perp$ 平面 CBD,$\therefore A_1O\parallel CE$.

又 $A_1O\not\subset$ 平面 BCE, $CE\subset$ 平面 BCE,$\therefore A_1O\parallel$ 平面 BCE, $A_1O\cap OF=O$, A_1O, $OF\subset$ 平面 A_1OF.

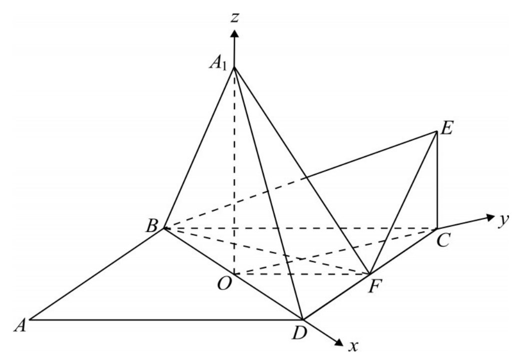
$\therefore$ 平面 $A_1OF\parallel$ 平面 BCE, $A_1F\subset$ 平面 A_1OF, $A_1F\parallel$ 平面 BCE. ……………………………(6分)

(2)以 O 为坐标原点,OD,OC,OA_1 所在直线为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

$A_1(0,0,3)$, $B(-2,0,0)$, $F(1,\dfrac{3}{2},0)$, $E(0,3,2)$.

设平面 A_1BF 的法向量为 $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$.

$$\therefore\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{BA_1}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(2,0,3)=2x_1+3z_1=0\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{BF}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(3,\dfrac{3}{2},0)=3x_1+\dfrac{3}{2}y_1=0\end{cases}.$$



令 $y_1=2$,则 $x_1=-1$, $z_1=\dfrac{2}{3}$, $\vec{u}=(-1,2,\dfrac{2}{3})$.

设平面 EBF 的法向量为 $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$.

$$\therefore\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{BF}=(x_2,y_2,z_2)\cdot(3,\dfrac{3}{2},0)=3x_2+\dfrac{3}{2}y_2=0\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{EF}=(x_2,y_2,z_2)\cdot(1,-\dfrac{3}{2},-2)=x_2-\dfrac{3}{2}y_2-2z_2=0\end{cases}.$$

令 $y_2=2$,则 $x_2=-1$, $z_2=-2$, $\vec{v}=(-1,2,-2)$.

$\therefore \cos\langle\vec{u}\cdot\vec{v}\rangle=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{1+4-\dfrac{4}{3}}{\dfrac{7}{3}\cdot3}=\dfrac{11}{21}$.

$\therefore$ 二面角 A_1-BF-E 的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{11}{21})^2}=\dfrac{8\sqrt{5}}{21}$. ……………………………(12分)

20.（12分）

（1）设3台设备自动模式不出故障的台数记为ξ，则$\xi \sim B(3, \frac{3}{4})$.

记“1名人员维护3台设备能顺利运行至工作时段结束”为事件A.

则 $P(A) = P(\xi = 3) + P(\xi = 2) = C_3^3(\frac{3}{4})^3 + C_3^2(\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{27}{32}$. ……………………………（4分）

（2）甲车间分得的两个小组相互对立，由（1）知每个小组能保证设备顺利运行至结束概率 $P = \frac{27}{32}$.

设“甲车间设备顺利运行至结束”为事件B.

则 $P(B) = (\frac{27}{32})^2 = \frac{3^6}{2^{10}} = \frac{3^6}{4^5}$.

乙车间7台设备自动模式不出故障的台数记为 η，$\eta \sim B(7, \frac{3}{4})$.

记“乙车间设备顺利运行至结束”为事件C.

$P(C) = P(\eta = 7) + P(\eta = 6) + P(\eta = 5) = C_7^7(\frac{3}{4})^7 + C_7^6(\frac{3}{4})^6 \cdot \frac{1}{4} + C_7^5(\frac{3}{4})^5 \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{3^7 + 7 \cdot 3^6 + 21 \cdot 3^5}{4^7} = \frac{17 \cdot 3^6}{4^7}$.

$\because \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{4^2}{17} = \frac{16}{17} < 1$,　$\therefore P(B) < P(C)$.

故乙车间生产稳定性更高. ……………………………（12分）

21.（12分）

解：（1）由题意不妨设 $A(\frac{p}{2}, p)$，$B(\frac{p}{2}, -p)$.

$\therefore AB = 2p, \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot \frac{p}{2} = 8$.

$p = 4, y^2 = 8x$. ……………………………（4分）

（2）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$.

则直线 l 的斜率为 $k_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{1}{8}(y_1^2 - y_2^2)} = \frac{8}{y_1 + y_2}$，直线 AB 为 $y - y_1 = \frac{8}{y_1 + y_2}(x - x_1)$.

则 $(y_1 + y_2)y - y_1 y_2 = 8x$.

又点 $F(2, 0)$ 在直线上，则 $-y_1 y_2 = 16$.

同理，直线 BD 为 $(y_2 + y_4)y - y_2 y_4 = 8x$.

点 $P(3, 0)$ 在直线 BD 上，则 $-y_2 y_4 = 24$.

同理，直线 AC 为 $(y_1 + y_3)y - y_1 y_3 = 8x$.

点 $P(3, 0)$ 在直线 AC 上，则 $-y_1 y_3 = 24$.

又 $k_1 = \frac{8}{y_1 + y_2}$，$k_2 = \frac{8}{y_3 + y_4}$，则 $\frac{k_2}{k_1} = \frac{y_1 + y_2}{y_3 + y_4} = \frac{y_1 + y_2}{\frac{-24}{y_1} + \frac{-24}{y_2}} = \frac{y_1 y_2}{-24} = \frac{-16}{-24} = \frac{2}{3}$.

……………………………（12分）

22.（12分）

解：（1）$a=0$ 时，$f(x)=\ln(x+1)-x$.

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1$ ，$f'(\frac{1}{e}-1)=e-1$ ，$f(\frac{1}{e}-1)=-\frac{1}{e}$.

$\therefore$ 切线方程为：$y-(-\frac{1}{e})=(e-1)(x-\frac{1}{e}+1)$.

整理得：$y=(e-1)x+e-2$. ……………………………（4分）

（2）$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1+a\sin x$ ，$f'(0)=0$.

令 $g(x)=f'(x)$ ，得 $g'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+a\cos x$ ，$g'(0)=a-1$.

令 $h(x)=g'(x)$ ，$h'(x)=\frac{2}{(x+1)^3}-a\sin x$.

(i)当 $a=1$ 时，$h'(x)$ 为$(-1,1)$上的减函数，$h'(1)=1-\sin 1>0$.

$\therefore -1<x<1$ 时，$h'(x)>0$ ，$h(x)$ 递增.

又此时 $h(0)=0$ ，故 $-1<x<0$ 时，$h(x)<0$ ，$g(x)$ 递减.

$0<x<1$ 时，$h(x)>0$ ，$g(x)$ 递增.

$\therefore -1<x<1$ 时，$g(x)\geqslant g(0)=0$ ，$f(x)$ 递增.

由 $f(0)=0$.故 $-1<x<0$ 时，$f(x)<f(0)=0$.

$0<x<1$ 时，$f(x)>f(0)=0$.

此时，存在 $t=1$ 使 $-1<x<1$ 时，$xf(x)\geqslant 0$ ，满足条件.

(ii)当 $a>1$ 时，$-1<x<0$ ，$h'(x)>0$ ，$h(x)$ 递增.

此时，$h(0)=a-1>0$ ，$h(-1+\frac{1}{\sqrt{a}})=-a(1-\cos(-1+\frac{1}{\sqrt{a}}))<0$.

故存在 $x_1\in(-1,0)$ 使得 $h(x_1)=0$.当 $x_1<x<0$ 时 $h(x)>0$ ，$g(x)$ 递增.

$\therefore x_1<x<0$ 时，$g(x)<g(0)=0$ ，$f(x)$ 递减.

即 $x_1<x<0$ 时，$f(x)>f(0)=0$ ，$xf(x)<0$ ，不存在 $t>0$ ，使 $x\in(-t,0)$ 时，$xf(x)\geqslant 0$.

(iii)当 $0<a<1$ 时，$h(x)\leqslant -\frac{1}{(x+1)^2}+a$ ，令 $-\frac{1}{(x+1)^2}+a<0$ ，得 $-1<x<-1+\frac{1}{\sqrt{a}}$.

$\therefore 0<x<-1+\frac{1}{\sqrt{a}}$ 时，$h(x)<0$ ，$g(x)$ 递减，$g(x)<g(0)=0$ ，$f(x)$ 递减.

即 $0<x<-1+\frac{1}{\sqrt{a}}$ 时，$f(x)<f(0)=0$ ，$xf(x)<0$ ，不存在 $t>0$ ，使 $x\in(0,t)$ 时，$xf(x)\geqslant 0$.

(iv)当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 递减. $g(x)<g(0)=0$ ，$f(x)$ 递减.

故 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)<f(0)=0$ ，$xf(x)<0$ ，不存在 $t>0$ ，使 $x\in(0,t)$ 时，$xf(x)\geqslant 0$.

综上所述：$a=1$. ……………………………（12分）